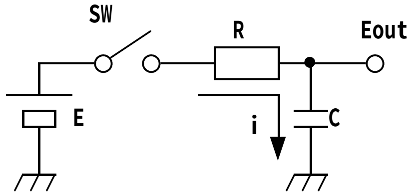
CR回路1

CR回路の計算1

右の図において、時刻 t=0 にSWがオンした場合の、任意の時刻 t における

Eout を求める。時刻 t=0 より以前では Eout=0 とする。

⑴ 流れる電流 i を考えると次の関係が成り立つ。



$$E = i(t) \times R + \frac{1}{C}\int_0^t i(t)\,dt \qquad \text{… (A)}$$

$$Eout = \frac{1}{C}\int_0^t i(t)\,dt \qquad \text{… (B)}$$

容量 C のコンデンサの両端の電圧 V と、充電された電荷 Q の関係は

Q[ｸｰﾛﾝ] = C[ﾌｧﾗｯﾄﾞ]× V[ﾎﾞﾙﾄ] … (a)

である。

また、コンデンサに電流 i が時間tだけ流れると、それによってたまる電荷 Q は、電流 i が一定のときは

Q[ｸｰﾛﾝ] = i[ｱﾝﾍﾟｱ]×t[秒] … (b)

電流 i が時間とともに変化する場合には i=i(t) と表記して、(b)式は下の(C)式のように書ける。これと (A) 式より、コンデンサに流れる電流 i(t) とコンデンサの両端の電圧 V との関係は(D)式となる。

$$Q = \int_0^t i(t)\,dt \qquad \text{… (C)} \qquad\qquad V = \frac{1}{C}\int_0^t i(t)\,dt \qquad \text{… (D)}$$

⑵ 上の(A)式から i (t) を求めると下の(C)式となる。また Eout は(D)式となる。

$$i(t) = \frac{E}{R} \times \left(E^{-\frac{t}{RC}} \right) \qquad \text{… (c)}$$

$$Eout = E \times \left(1 - E^{-\frac{t}{RC}} \right) \qquad \text{… (d)}$$

(A)式から(c)式を求めるには、(A)式の両辺を時間で微分して得た微分方程式を解くが、詳細は補足2を参照。(c)式を(A)式に代入して正しいことを確かめることが出来る。

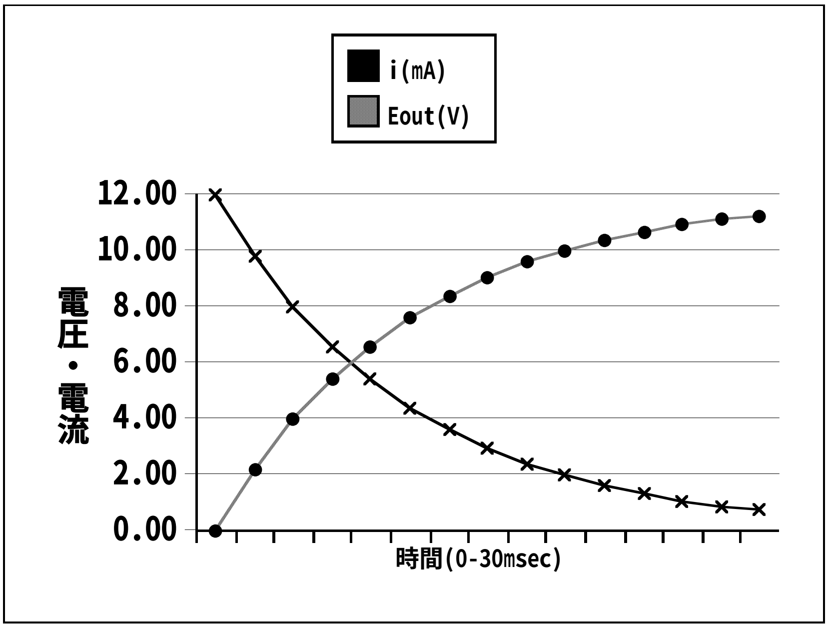
(c)、(d)式の意味は、

- スイッチがオンした時刻 t=0 では電流i= E／Rである。これは、時刻 t=0 ではコンデンサの両端の電圧 Eout=0V なので、理屈に合う。
- 時刻 t=∞ では i=0 である。このとき Eout=E となる。
- よって電流 i はスイッチオンのとき最大で、その後時間とともに時定数 RC で指数関数的に減少するような変化をする。

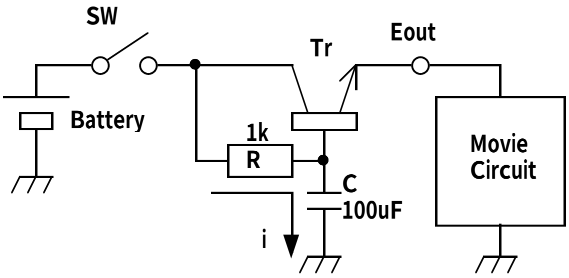
例1：R = 1kΩ、C = 100uF、E = 12Vとして、c式、d式で iとEoutを計算すると下の表のようになる。時定数RC = 1kΩ×100uF = 100msであり、時刻t = 100msではEout = 7.59Vとなっている。時定数に相当する時間が経過したときの出力は約63%（ = 1－1／e、 eは自然対数の底）となる。

R(ohm)=	1000
C(F)=	0.0001
E(V)=	12

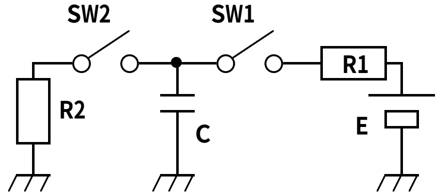
t(sec)	i(mA)	Eout(V)
0.00	12.00	0.00
0.02	9.82	2.18
0.04	8.04	3.96
0.06	6.59	5.41
0.08	5.39	6.61
0.10	4.41	7.59
0.12	3.61	8.39
0.14	2.96	9.04
0.16	2.42	9.58
0.18	1.98	10.02
0.20	1.62	10.38
0.22	1.33	10.67
0.24	1.09	10.91
0.26	0.89	11.11
0.28	0.73	11.27
0.30	0.60	11.40



例2：電源スイッチをオンしたときに、回路に供給される電圧が滑らかに立ち上がるように、右図のような回路を使う。スイッチをオンすると、Trのベース電圧Vｂは、最初は0Vで、RC = 1k×100uF = 100msの時定数で指数関数的に上昇する。EoutはVbより少し遅れて上昇する（Eout = Vb－Vbe）。
実際には、Eoutが上昇するとTrにコレクタ電流（負荷電流）が流れ、それに必要なベース電流が流れるため、Rを流れる電流のうち一部がベース電流となって、Cの充電電流が減るので、Vbの変化の様子は1ページの式のとおりにはならない。



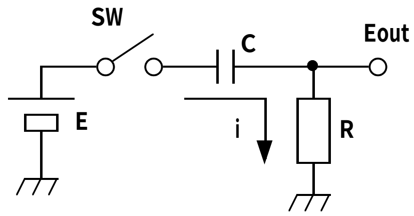
応用問題：
右図で最初、SW1 = オン、SW2 = オフとして十分な時間をおいて、Cを電圧Eに充電する（安定状態）。その後、SW1 = オフとする。
その後、SW2をオンしたときのCの電圧はどのようになるか。SW2をオンした時刻をt = 0として、Cの電圧を表す式を求めよ。



CR回路の計算2

右の図において、時刻t = 0にSWがオンした場合の、任意の時刻tにおけるEoutを求める。

(1) 流れる電流i (t) を考えると次の関係が成り立つ。



$$E = i(t) \times R + \frac{1}{C}\int_0^t i(t)\,dt \qquad \text{... (E)}$$

$$Eout = i(t) \times R \qquad \text{... (F)}$$

(2) 上の(E)式からiを求めると下の(G)式となる。またEout (t) は(H)式となる。(G式はc式と同じ。)

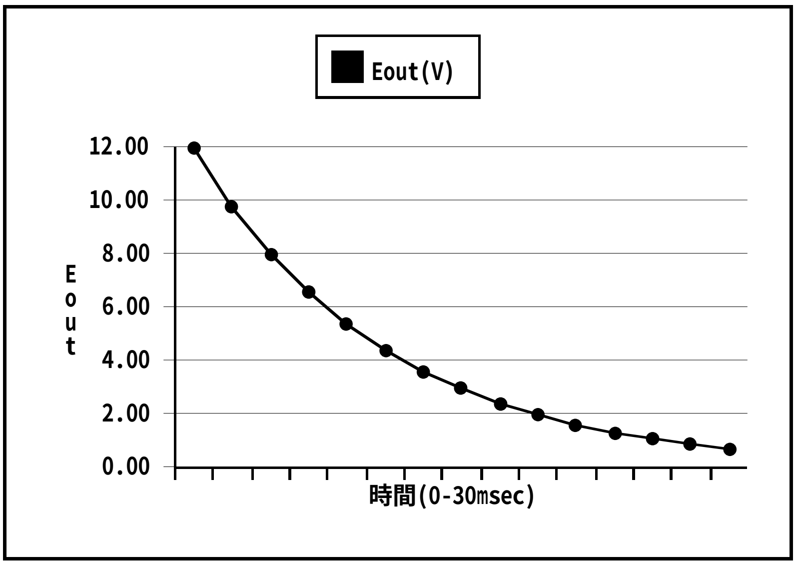
$$i(t) = \frac{E}{R} \times E^{-\frac{t}{RC}} \qquad \text{... (G)}$$

$$Eout(t) = i(t) \times R = E \times \left(E^{-\frac{t}{RC}}\right) \qquad \text{... (H)}$$

R = 1kΩ、C = 100uF、E = 12Vとして、(G)式、(H)式で iとEoutを計算すると下の表のようになる。時定数RC = 1kΩ×100uF = 100msであり、時刻t = 100msではEout = 4.41Vとなっている。時定数に相当する時間が経過したときの出力は約37% (= 1／e、 eは自然対数の底) となる。

R(ohm)=	1000
C(F)=	0.0001
E(V)=	12

t(sec)	i(mA)	Eout(V)
0.00	12.00	12.00
0.02	9.82	9.82
0.04	8.04	8.04
0.06	6.59	6.59
0.08	5.39	5.39
0.10	4.41	4.41
0.12	3.61	3.61
0.14	2.96	2.96
0.16	2.42	2.42
0.18	1.98	1.98
0.20	1.62	1.62
0.22	1.33	1.33
0.24	1.09	1.09
0.26	0.89	0.89
0.28	0.73	0.73
0.30	0.60	11.40



CR回路の出力応答1

CR回路の計算1、2から、CR回路の出力応答がわかる。
図1の例ではEinとEoutは図2のようになる。
Einが図3のような連続パルスのとき、パルスの周期と時定数RCの大小関係によってEoutは異なった波形となる。図3は、パルス幅が時定数と同じくらいの大きさの場合であり、図4は時定数に比べてパルス幅が大きい場合、図5は時定数に比べてパルス幅が小さい場合である。
（これらの図では、横軸は時間であり、縦軸は電圧を表している。）

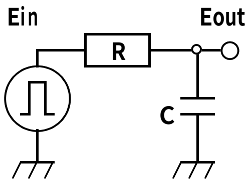


図1

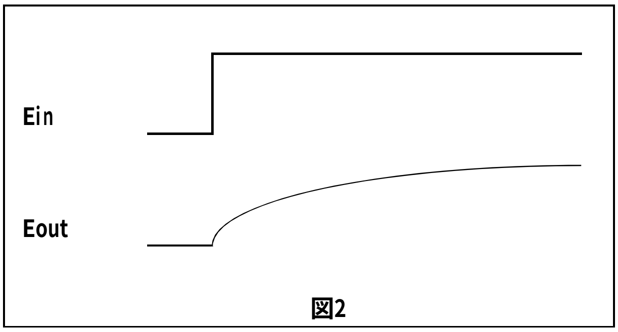


図2

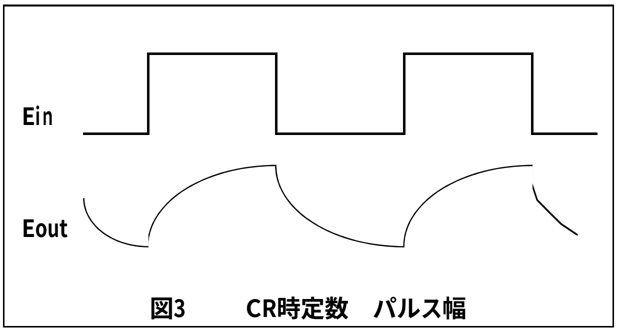


図3　　CR時定数　パルス幅

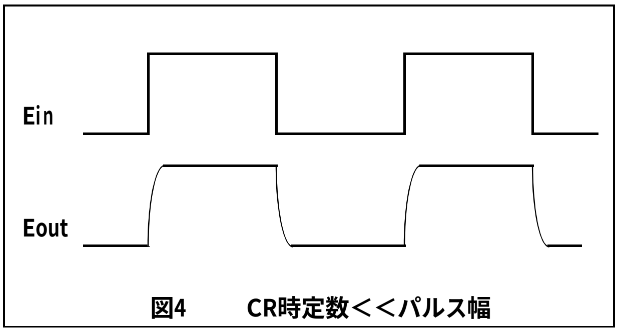


図4　　CR時定数＜＜パルス幅

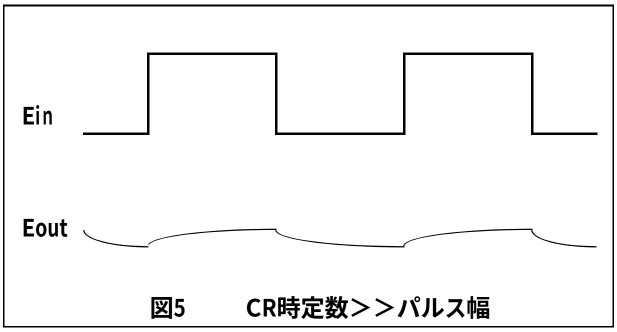


図5　　CR時定数＞＞パルス幅

CR回路の出力応答2

右の図６の回路について同様に考えると、図７から図10となる。

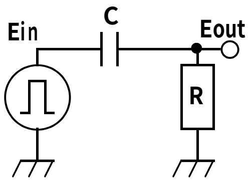


図6

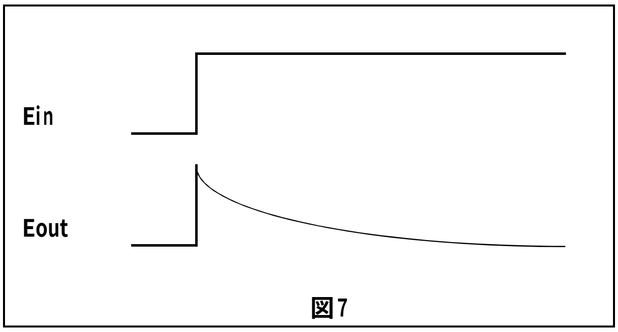


図7

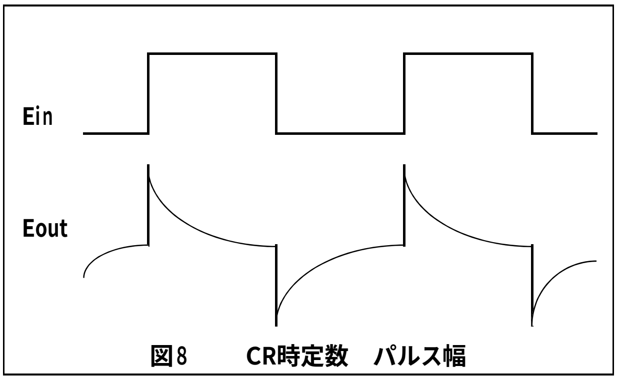


図8　　CR時定数　パルス幅

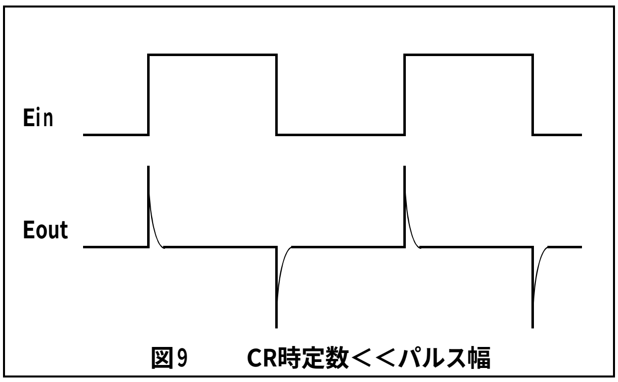


図9　　CR時定数＜＜パルス幅

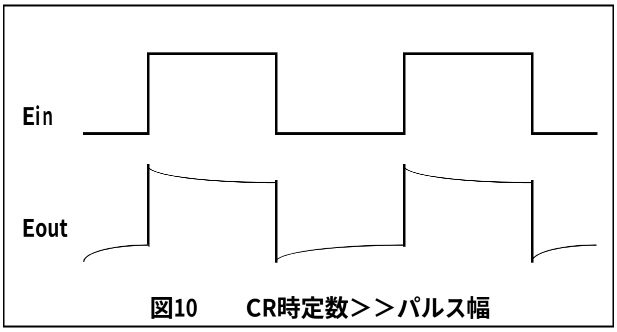
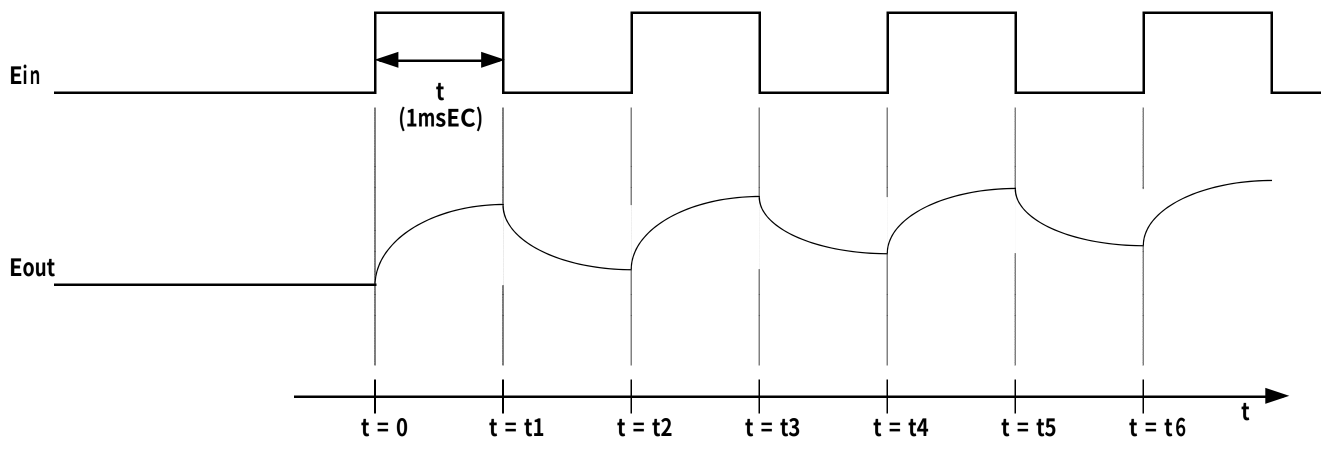


図10　　CR時定数＞＞パルス幅

補足1

時刻t＜0ではEin = 0、時刻t = ＞0ではEinがパルスとなるような下図に示すような有限パルスに対するCR回路の過渡応答は、図1の回路に対しては下図のEoutのごとくになる。



パルス電圧 = 1V、R = 1kΩ、C = 1uF、パルス幅t = 1msの場合を考える。

- 時刻t = 0〜t1では、Eoutは右に示すC式で表せる。
  t = 1msとおいてEout（t）を計算すると
  Eout（0.001） = 0.632V
  となる。

時刻t = 0〜0.001に対して

$$Eout(t) = 1\times\left(1-E^{-\frac{t}{RC}}\right) \quad \ldots(C)$$

- 時刻t = t1〜t2では、Eoutは最初0.632Vで、そこからCRの時定数で0Vに向かって低下する。式で表すと、i式となる（2ページの応用問題参照。）この式を使って時刻t = t2 = 0.002の時のEoutを計算すると
  Eout（0.002） = 0.232V
  となる。すなわち時刻t2でEoutは0Vまで下がらない。

時刻t = 0.001〜0.002に対して

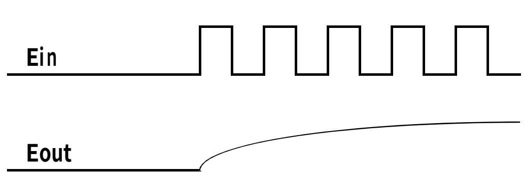
$$Eout(t) = 0.632\times E^{-\frac{(t-0.001)}{RC}} \quad \ldots(i)$$

- 時刻t = t2〜t3では、Eoutは最初0.232Vで、そこからCRの時定数で1Vに向かって上昇する。式で表すとＪ式となる。これはC式と変化の様子は同じであるが、初期値が異なっている。
  Ｊ式で時刻t = t3におけるEoutを計算すると
  Eout（0.003） = 0.717V
  となる。すなわち時刻t3におけるEoutは時刻t1におけるEoutより大きい。

時刻t = 0.002〜0.003に対して

$$Eout(t) = 0.232 + 0.768\times\left(1-E^{-\frac{t-0.002}{RC}}\right) \quad \ldots(J)$$

- 以後のt3〜tｎにおいて、Eoutのピーク値とボトム値は次第に上昇し、やがて安定するが、安定状態では0.5Vを中心に上下対称な波形となる。
- このようになるのは、入力パルスが直流成分を含んだ波形であり、平均すると0.5Vの直流電圧に等しい波形となっているからである。
- 時定数CRがパルス幅に比べて十分に大きい場合には、Eoutの三角波形の振幅は小さくなり、右の図のような平均直流電圧が得られる。



補足2

(イ)式をi(t)について解く。

両辺を時間tで微分して(ロ)式、(ハ)式を得る。(ハ)式を見ると、i(t)は微分しても関数の形が変わらないような関数であることがわかる。微分して同じ形になる関数は指数関数ということで、

$i(t) = \alpha \times \mathrm{Exp}(\beta t) + \gamma$

とおいて、(ハ)式に代入すると(ニ)式となる。(ニ)式より次の関係を得る。

$\beta = -1/RC$

$\gamma = 0$

また、t = 0においてi(t) = E/Rであるから

$\alpha = E/R$

となる。これらのα，β，γから(ホ)式を得る。

$$E = i(t) \times R + \frac{1}{C}\int_0^t i(t)\,dt \qquad \cdots(イ)$$

$$0 = \frac{di(t)}{dt} \times R + \frac{1}{C} \times i(t) \qquad \cdots(ロ)$$

$$\frac{di(t)}{dt} = -\frac{1}{RC} \times i(t) \qquad \cdots(ハ)$$

$$\left(\begin{array}{l}
\dfrac{di(t)}{dt} = \alpha \times \beta \times \mathrm{Exp}(\beta t) \\[2ex]
-\dfrac{1}{RC} \times i(t) = -\dfrac{1}{RC} \times (\alpha \times \mathrm{Exp}(\beta t) + \gamma) \\[2ex]
\therefore\ \alpha \times \beta \times \mathrm{Exp}(\beta t) = -\dfrac{1}{RC} \times (\alpha \times \mathrm{Exp}(\beta t) + \gamma) \\[2ex]
\therefore\ \alpha \times \left(\beta + \dfrac{1}{RC}\right) \times \mathrm{Exp}(\beta t) + \dfrac{1}{RC} \times \gamma = 0
\end{array}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l}
\therefore\ \alpha \times \left(\beta + \dfrac{1}{RC}\right) \times \mathrm{Exp}(\beta t) = 0 \\[2ex]
\dfrac{1}{RC} \times \gamma = 0
\end{array}\right\} \qquad \cdots(ニ)$$

$$i(t) = \frac{E}{R} \times \mathrm{Exp}\left(-\frac{t}{RC}\right) \qquad \cdots(ホ)$$