ＣＲ回路1、2の補足

ＣＲ回路１の補足２で微分方程式を解いているところですが、普通の方程式では、最初の式をいろいろと変形していって答えを求めますが、この場合の解き方はそれとちがって

①あらかじめ答えの式の形を予想して、答えの式を仮定で決めてしまう。
②その答えが元の方程式を満足するように、答えの式に含まれる定数（α、β、γ）を決める。
③そのために予想して決めた答えの式が元の方程式を満たすものとして、代入してしまう。
④その結果得られる式から、仮定で決めた答えの式に含まれる定数（α、β、γ）を求める。

という手順で解いています。

回路の勉強が目的ですから、微分方程式を解く方法はあまり気にしなくてもよいと思います。ただ、答えが正しいかどうかを元の方程式に代入して確かめることが出来る必要はあると思います。ＣＲ、ＬＲの充電・放電回路では、関数としては$\exp(-t/\tau)$しか出てきません。それで普通は微分方程式を立てて解くことはせず、単に式を書き下す事が出来ます。

例えば図１のように下がってゆく波形（電圧または電流）に対しては、関数の基本型は次のようになります。

$$f(t)=A\times\exp(-t/\tau)+B$$

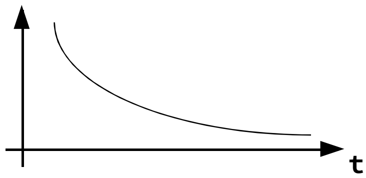


図1

時刻$t=0$では$\exp(-t/\tau)=1$、$f(t)=A+B$であり、時刻$t=\infty$では$\exp(-t/\tau)=0$、$f(t)=B$となることから、具体例に当てはめてＡとＢを決めればＯＫです。τは時定数で、$\tau=RC$または$\tau=L/R$となります。（Ｌ／ＲについてはＬＲ回路を参照。）
逆に、図２のような波形に対しては、関数の基本型は次のようになります。

$$f(t)=A\times\left(1-\exp(-t/\tau)\right)+B$$

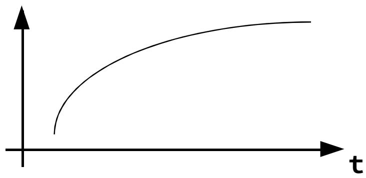


図2

この場合では時刻$t=0$では$\exp(-t/\tau)=1$、$f(t)=B$であり、時刻$t=\infty$では$\exp(-t/\tau)=0$、$f(t)=A+B$となります。

ＣＲまたはＬＲの回路ではこの２つの基本型しかありません。（ＣとＬを含む回路の場合には振動する要素が出てくるので、話がややこしくなります。）

ＣＲ回路２のローパスフィルタの伝達関数の振幅と位相角のところですが、伝達関数Ｇｖ（ω）は

$$Gv(\omega)=\frac{eout}{ein}=\frac{1}{1+j\omega CR} \qquad \cdots\cdots(1)$$

となります。ここでＧｖ（ω）が複素数になっているところがポイントです。（ｊが虚数単位。ｉの代り）
入力電圧と出力電圧を電圧計で測定すると、電圧の大きさしかわかりませんので、何倍に増幅しているかという倍率しか出てきませんが、入力電圧と出力電圧をオシロでみると、電圧の大きさ以外に、位相がどのようになっているかということが見えます。
単なる抵抗で分圧する回路の場合は、入力電圧と出力電圧の位相は同じになりますが、ＣＲ回路では入力電圧と出力電圧の位相がずれます。そしてそのずれ量が周波数によって変化します。このことを式で表現しているのが上の複素数の式という訳です。
複素数はその絶対値と偏角を持ちますが、伝達関数の場合、その絶対値が振幅増幅度（減衰度）をあらわし、偏角が入力電圧と出力電圧の位相のずれ量（遅れ又は進み）を表しています。

伝達関数が右の図３のような複素数で表せるとすると、その回路の増幅度はＲ倍で、出力電圧は入力電圧のＲ倍となり、また位相遅れはθで、出力の位相は入力の位相よりもθだけ遅れることになります。（θ＜０のときは位相が進む。）

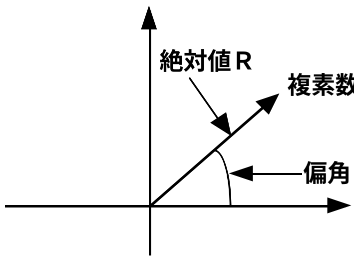
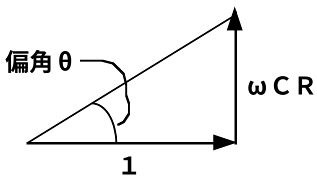


図３

$$Z=R\times\exp(j\theta)$$
$$=R\cos(\theta)+jR\sin(\theta)$$

伝達関数Ｇｖ（ω）が式（１）の場合には、これの絶対値と偏角（位相角）を求めればよいわけですが、偏角θは次のようになります。

$$\theta=\arg\left(Gv(\omega)\right)$$
$$=\arg\left(\frac{1}{1+j\omega CR}\right)$$
$$=\arg(1)-\arg(1+j\omega CR)$$
$$=0-\arctan(\omega CR)$$



$$\tan\theta=\frac{\omega CR}{1}$$

ａｒｇ（Ｚ）は複素数Ｚの偏角を表します。複素数Ｚ１、Ｚ２に対して、次の関係が成り立ちます。

$$\arg(Z1\times Z2)=\arg(Z1)+\arg(Z2)$$

$$\arg\left(\frac{Z1}{Z2}\right)=\arg(Z1)-\arg(Z2)$$